Groverの探索アルゴリズム

計算アルゴリズム論

今井浩

Grover のアルゴリズムの利用

SAT など ある候補が解かどうか求める関数

$F(x) = 1$ （x が解のとき）

$\quad\quad\;\; 0$ （それ以外）

$$\boldsymbol{U_{F(x)} : |x\rangle|b\rangle \mapsto |x\rangle|b \oplus F(x)\rangle}$$

$$\boldsymbol{|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle)} \qquad \boldsymbol{|b \oplus 1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle)}$$

$$U_{F(x)} : \sum_x |x\rangle|b\rangle \mapsto \sum_x (-1)^{F(x)} |x\rangle|b\rangle$$

$$R_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad V_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle, \quad G_n = -H_n R_n H_n V_f$$

$$H_n R_n H_n = I - 2P_n, \quad P_n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$-H_n R_n H_n \sum_x c_x |x\rangle = \sum_x (2A - c_x) |x\rangle, \quad A = \frac{1}{2^n} \sum_x c_x$$

x: a unique solution

$$t_r|x\rangle + f_r \sum_{y\neq x}|y\rangle, \quad t_0 = f_0 = \frac{1}{2^{n/2}}$$

$$\begin{pmatrix} t_{r+1} \\ f_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2^{n-1}} & 2-\frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_r \\ f_r \end{pmatrix}, \quad t_r^2 + (2^n - 1) f_r^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} t_r \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta_r \\ \frac{1}{\sqrt{2^n - 1}}\cos\theta_r \end{pmatrix}, \quad \sin^2\theta_0 = \frac{1}{2^n}, \quad \theta_0 \approx \sqrt{\frac{1}{2^n}}$$

$$\theta_{r+1} = \theta_r + \omega, \quad \cos\omega = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \cos 2\theta_0$$