離散数学

線形計画:単体法

今井　浩

2010-06-01

線形計画(Linear Programming)問題

- 多変数の線形等式･線形不等式の制約の下、その多変数の線形関数を最適化
  - 様々な現実問題をモデル化できる
  - ネットワークフローの諸問題は特殊な場合(整数性)
  - かなりの大規模問題も解ける(単体法、内点法)

- 単体法(simplex method)
  - 基底解をpivotingで移って最適解を求める

標準形(standard form)

(制約)行列$A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, ベクトル$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$: given

変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$

費用ベクトル

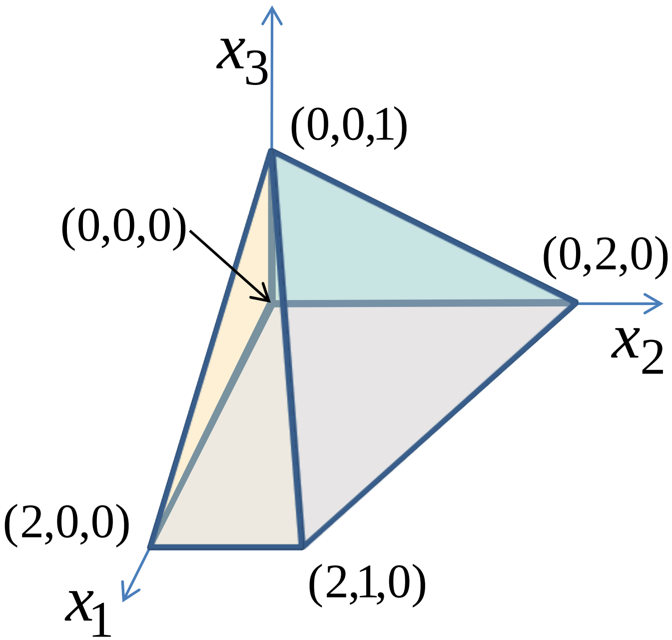
標準形：

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} : \text{目的関数(objective function)})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (\text{rank } A = m < n)$$

条件を満たす$\boldsymbol{x}$: 実行可能解(feasible solution)

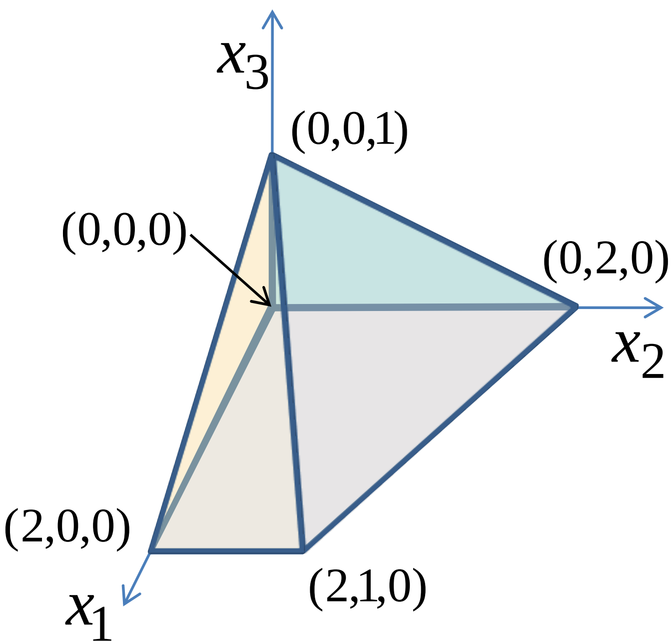
Linear Programming (running example)



$$\max \quad x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Linear Programming (running example)



$$\max \quad x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

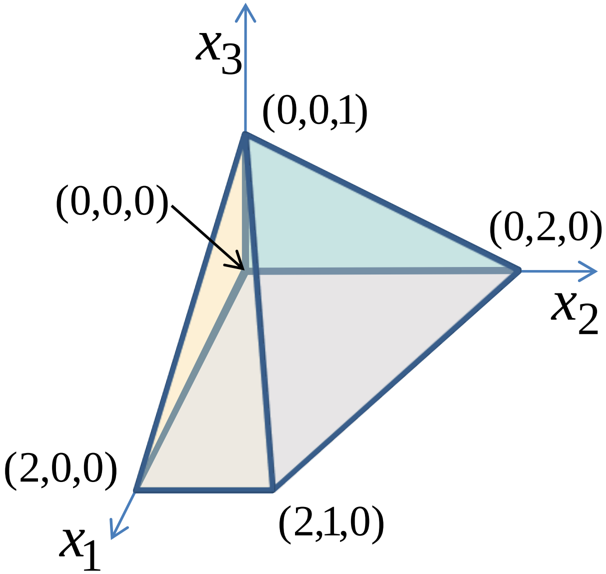
$$\min \; -x_1 - x_2 - \; x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 \qquad\qquad + 2x_3 + x_4 \qquad = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad\quad + x_5 = 4 \\ \qquad\qquad x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

単体法の幾何的考え方

- 最適解は凸多面体の端点に限ってよい
- ある端点からスタートして、
  - 辺をたどって隣の端点でよりよい端点に動く
  - これを繰返し、どの隣の端点よりよい端点:最適解

- これを行列で表現(標準形から基底形式へ)
  - 部分正方行列で正則な基底に着目
  - 実行可能基底解:端点になっている
  - 隣の端点に移動:pivoting (現基底から1変数入替)



$$\max \ x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \ -x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	−1	−1	−1	0	0	0
x_4	1	0	2	**1**	**0**	2
x_5	1	2	4	**0**	**1**	4
(	0	0	0	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	−1/2	−1	0	1/2	0	1
x_3	1/2	0	**1**	1/2	**0**	1
x_5	−1	2	**0**	−2	**1**	0
(	0	0	1	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	−3/4	−1/2	0	0	1/4	1
x_4	1/2	−1	**0**	**1**	−1/2	0
x_3	1/4	1/2	**1**	**0**	1/4	1
(	0	0	1	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	−1	0	0	−1/2	1/2	1
x_3	1/2	**0**	**1**	1/2	0	1
x_2	−1/2	**1**	**0**	−1	1/2	0
(	0	0	1	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	0	−2	0	3/2	−1/2	1
x_1	**1**	−2	**0**	2	−1	0
x_3	**0**	1	**1**	−1/2	1/2	1
(	0	0	1	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	0	−1	1	1	0	2
x_1	**1**	0	2	1	**0**	2
x_5	**0**	2	2	−1	**1**	2
(	2	0	0	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	−1/2	0	1	0	1/2	2
x_4	1	**0**	2	**1**	0	2
x_2	1/2	**1**	2	**0**	1/2	2
(	0	2	0	)		

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
z	0	0	2	1/2	1/2	3
x_1	**1**	**0**	2	1	0	2
x_2	**0**	**1**	1	−1/2	1/2	1
(	2	1	0	)		

Pivoting

$$
\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline
z & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
x_4 & 1 & 0 & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\
x_5 & 1 & 2 & 4 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \\ \hline
(& 0 & 0 & 0 &) & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l} +(1\times 行) \\ \times 1 \\ +((-1)\times 行) \end{array}
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline
z & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline
x_1 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 \\
x_5 & \mathbf{0} & 2 & 2 & -1 & \mathbf{1} & 2 \\ \hline
(& 2 & 0 & 0 &) & &
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline
z & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
x_4 & 1 & 0 & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\
x_5 & 1 & 2 & 4 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 4 \\ \hline
(& 0 & 0 & 0 &) & &
\end{array}\right)
\begin{array}{l} +(1\times 行) \\ +((-2)\times 行) \\ \times \frac{1}{4} \end{array}
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 1 \\ \hline
z & -3/4 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \\ \hline
x_4 & 1/2 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\
x_3 & 1/4 & 1/2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1/4 & 1 \\ \hline
(& 0 & 0 & 1 &) & &
\end{array}\right)
$$

単体法の基底形式での考え方

- 等式制約で注目している単位行列(基底)
  - 基底に入っていない(非基底)変数:=0
  - 基底に入ってる変数(基底変数):=右辺ベクトル

  ⇒ 基底解 : 凸多面体で端点になっている
- z の行に負の数がある
  - 今の端点(基底解)からその変数を基底に入れる
  - 基底から追い出す変数 : Ratio testで決める
    - (非退化なら)端点から辺をたどると最初にあたる制約

  ⇒ 次の基底解へ : (非退化なら)隣接端点へ

退化に関するポイント

- (0,0,1)が退化(4平面が1点で会す)
  - その端点に対応する4実行可能基底解
    - 右辺ベクトル(非負ベクトル): 0 存在
    - その中で動くpivotingsが2つ
    - ここでは有向閉路はない(退化してると存在しうる)
  - 初期実行可能基底解に x_3 を入れる場合
    - Ratio testで両方とも候補に(tie)

基底形式

$$A = (\boldsymbol{a}_i \mid i = 1, \ldots, n) = (B \mid N),\ \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$$ と分解：

基底行列 $B \in \boldsymbol{R}^{m \times m}$, 正則,　非基底行列 $N \in \boldsymbol{R}^{m \times (n-m)}$

$$B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \ \Rightarrow\ I\boldsymbol{x}_B + B^{-1}N\boldsymbol{x}_N = B^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N$$

$\tilde{N} := B^{-1}N,\ \tilde{\boldsymbol{c}} := \boldsymbol{c}_N - (B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B,\ \tilde{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b}$ とすると元問題は

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} & I\boldsymbol{x}_B + \tilde{N}\boldsymbol{x}_N = \tilde{\boldsymbol{b}},\quad \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} B^{-1}(A \mid \boldsymbol{b}) &= B^{-1}(B \mid N \mid \boldsymbol{b}) \\ &= (I \mid \tilde{N} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}) \end{aligned}$$

基底解・タブロー

$$\min \quad \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N$$

$$\text{s.t.} \quad I\boldsymbol{x}_B + \tilde{N}\boldsymbol{x}_N = \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \geq 0$$

基底解(basic solution) : $\boldsymbol{x}_B = \tilde{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{x}_N = 0, \quad B$: 基底(basis)

実行可能(feasible)基底解 : $\tilde{\boldsymbol{b}} \geq 0$の基底解, B : 実行可能基底

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} & \bar{c} \\ \hline \boldsymbol{x}_B & I & \tilde{N} & \tilde{\boldsymbol{b}} \end{array}\right], \qquad \bar{c} = -\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b}$$

単体法:大枠

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} & I\boldsymbol{x}_B + \tilde{N}\boldsymbol{x}_N = \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \geq 0 \end{array} = \begin{array}{ll} \min & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \text{s.t.} & \tilde{N}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} \geq 0 \end{array}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{b}_i),\ \tilde{\boldsymbol{c}} = (\tilde{c}_j),\ \tilde{N} = (\tilde{\boldsymbol{a}}_j \mid j = m+1, \ldots, n) = (\tilde{a}_{ij}),\ \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}_N$$

$\tilde{\boldsymbol{a}}_j : B^{-1}A$の第$j$列ベクトル

(初期状態) 実行可能基底Bからスタート

(Case 1) $\tilde{\boldsymbol{c}} \geq 0$: 基底解が最適解、停止

(Case 2) $\exists j : \tilde{c}_j < 0,\ \tilde{\boldsymbol{a}}_j \leq 0 \Rightarrow$目的関数$\to -\infty$ と判明、停止

(Case 3) $\exists j : \tilde{c}_j < 0,\ \exists i : \tilde{a}_{ij} > 0 \Rightarrow$ pivoting, 基底更新し(Case 1)へ

単体法: Case 1 最適解

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \\ \text{s.t.} & I\boldsymbol{x}_B + \tilde{N}\boldsymbol{x}_N = \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \geq 0 \end{array}$$

(初期状態) 実行可能基底Bからスタート

(Case 1) $\tilde{\boldsymbol{c}} \geq 0$: 基底解が最適解

$\because$ $\min\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N \geq 0$かつこの基底解で0達成

単体法: Case 2 無限解

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{x}} \\
\text{s.t.} \quad & \tilde{N}\tilde{\boldsymbol{x}} \le \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} \ge 0
\end{aligned}
$$

$\tilde{\boldsymbol{c}} = (\tilde{c}_j),\ N = (\tilde{\boldsymbol{a}}_j), \tilde{\boldsymbol{a}}_j$: 第j列ベクトル

(Case 2) $\exists j : \tilde{c}_j < 0,\ \tilde{\boldsymbol{a}}_j \le 0 \Rightarrow$ 目的関数 $\to -\infty$

$\because\ \forall \alpha \ge 0 :\ \tilde{\boldsymbol{x}} := \alpha \boldsymbol{e}_j$ は実行可能($\boldsymbol{e}_j$: 第j単位ベクトル)

$$(\tilde{N}\tilde{x} = \alpha \tilde{\boldsymbol{a}}_j \le 0 \le \tilde{\boldsymbol{b}})$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \alpha \tilde{c}_j \to -\infty \quad (\alpha \to +\infty)$$

単体法：Case 3 Pivoting (1/4)

$$\min\ \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\text{s.t.}\quad \tilde{N}\tilde{\boldsymbol{x}} \le \tilde{\boldsymbol{b}},\quad \tilde{\boldsymbol{x}} \ge 0 \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = (\tilde{b}_i),\ \tilde{\boldsymbol{c}} = (\tilde{c}_j),\ \tilde{N} = (\tilde{a}_{ij})$$

$$\text{(Case 3)}\ \exists j : \tilde{c}_j < 0,\ \exists i : \tilde{a}_{ij} > 0 \Rightarrow \text{pivoting (ratio test)}$$

$$\delta := \max\{\alpha \mid \tilde{N}(\alpha \boldsymbol{e}_j) \le \tilde{\boldsymbol{b}}\} = \min\left\{\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{ij}} \mid i : \tilde{a}_{ij} > 0\right\} =: \frac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{kj}}$$

$$k := \arg\min\{\text{ratios}\}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} - \delta\tilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \boldsymbol{e}_j \end{pmatrix}$$ はともに実行可能基底解

単体法: Case 3 Pivoting (2/4)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}} - \delta\tilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \delta\boldsymbol{e}_j \end{pmatrix}$$ はともに実行可能基底解

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & & & & & & & \tilde{a}_{1j} \\
 & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & 1 & & & & & \tilde{a}_{k-1,j} \\
 & \cdots & & 1 & & \cdots & & \tilde{a}_{kj} \\
 & & & & 1 & & & \tilde{a}_{k+1,j} \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & 1 & \tilde{a}_{mj}
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{k-1} \\ \tilde{b}_k \\ \tilde{b}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \\ \hline 0 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

行列と右辺ベクトルについて

- 第k行を$\tilde{a}_{kj}$で割り
- それを第i行に$-\tilde{a}_{ij}$倍して加える

$$\begin{pmatrix}
1 & & & -\tilde{a}_{1j}/\tilde{a}_{kj} & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & -\tilde{a}_{k-1,j}/\tilde{a}_{kj} & & & \\
 & & & 1/\tilde{a}_{kj} & & & \\
 & & & -\tilde{a}_{k+1,j}/\tilde{a}_{kj} & 1 & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & -\tilde{a}_{mj}/\tilde{a}_{kj} & & & 1
\end{pmatrix}$$

を左から掛ける

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & & & -\tilde{a}_{1j}/\tilde{a}_{kj} & & & & 0 \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & 1 & -\tilde{a}_{k-1,j}/\tilde{a}_{kj} & & & & 0 \\
 & \cdots & & 1/\tilde{a}_{kj} & & \cdots & & 1 \\
 & & & -\tilde{a}_{k+1,j}/\tilde{a}_{kj} & 1 & & & 0 \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & -\tilde{a}_{mj}/\tilde{a}_{kj} & & & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 - \tilde{b}_k\tilde{a}_{1j}/\tilde{a}_{kj} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{k-1} - \tilde{b}_k\tilde{a}_{k-1,j}/\tilde{a}_{kj} \\ 0 \\ \tilde{b}_{k+1} - \tilde{b}_k\tilde{a}_{k+1,j}/\tilde{a}_{kj} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m - \tilde{b}_k\tilde{a}_{mj}/\tilde{a}_{kj} \\ \hline \delta \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{b}} - \delta\tilde{\boldsymbol{a}}_j + \delta\boldsymbol{e}_k$$

単体法: Case 3 Pivoting (3/4)

$$B^{-1}(B \mid \boldsymbol{a}_j \mid \boldsymbol{b}) = (I \mid \tilde{\boldsymbol{a}}_j \mid \boldsymbol{b})$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & \tilde{a}_{1j} \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \tilde{a}_{k-1,j} \\ & \cdots & & 1 & & \cdots & \tilde{a}_{kj} \\ & & & & 1 & & \tilde{a}_{k+1,j} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & \tilde{a}_{mj} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{k-1} \\ \tilde{b}_k \\ \tilde{b}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \\ \hline 0 \end{array}\right) = \tilde{\boldsymbol{b}}$$

$\tilde{B}$: Bの第k列$\boldsymbol{a}_k$を$\boldsymbol{a}_j$と交換

$$\tilde{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$$

$$\tilde{B}^{-1}(B \mid \boldsymbol{a}_j \mid \boldsymbol{b})$$

$$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}, \boldsymbol{e}_k + (\boldsymbol{e}_k - \tilde{\boldsymbol{a}}_j)/\tilde{a}_{kj}, \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_m \mid \boldsymbol{e}_k \mid \tilde{\boldsymbol{b}} - \delta \boldsymbol{a}_j + \delta \boldsymbol{e}_k)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & -\tilde{a}_{1j}/\tilde{a}_{kj} & & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ & & 1 \quad -\tilde{a}_{k-1,j}/\tilde{a}_{kj} & & & & 0 \\ & \cdots & 1/\tilde{a}_{kj} & & \cdots & & 1 \\ & & -\tilde{a}_{k+1,j}/\tilde{a}_{kj} & 1 & & & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & -\tilde{a}_{mj}/\tilde{a}_{kj} & & & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \tilde{b}_1 - \tilde{b}_k \tilde{a}_{1j}/\tilde{a}_{kj} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{k-1} - \tilde{b}_k \tilde{a}_{k-1,j}/\tilde{a}_{kj} \\ 0 \\ \tilde{b}_{k+1} - \tilde{b}_k \tilde{a}_{k+1,j}/\tilde{a}_{kj} \\ \vdots \\ \tilde{b}_m - \tilde{b}_k \tilde{a}_{mj}/\tilde{a}_{kj} \\ \hline \delta \end{array}\right) = \tilde{\boldsymbol{b}} - \delta \tilde{\boldsymbol{a}}_j + \delta \boldsymbol{e}_k$$

単体法: Case 3 Pivoting (4/4)

$$\min \qquad \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_N$$

$$\text{s.t.} \quad I\,\boldsymbol{x}_B + \tilde{N}\boldsymbol{x}_N = \tilde{\boldsymbol{b}}, \quad \boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N \ge 0$$

$$(\text{Case 3})\ \exists j : \tilde{c}_j < 0,\ \ \exists i : \tilde{a}_{ij} > 0 \Rightarrow \text{pivoting} : \delta = \frac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_{kj}}$$

$$B^{-1}(B \mid N \mid \boldsymbol{b}) = (I \mid \tilde{N} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}) \ \Rightarrow \tilde{B}^{-1}(B \mid N \mid \boldsymbol{b}) = \text{前頁}$$

基底$B \to \tilde{B}$:

列jを入れ、列kを出す

第k行を$\tilde{a}_{kj}$で割り、

それを第i行に$-\tilde{a}_{ij}$ (第0行は$-\tilde{c}_j$)倍して加える

$$x_j \quad \left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|c} & & 0 & & & & & \tilde{c}_j & & \bar{c} \\ \hline \vdots & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ x_k & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{kj} & \cdots & \tilde{b}_k \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots \end{array}\right] \times \frac{1}{\tilde{a}_{kj}}$$

$-\tilde{c}_j \times$(行)

$-\tilde{a}_{ij} \times$(行)

単体法：停止性、巡回

非退化の仮定: $\forall$実行可能基底B, $\tilde{\boldsymbol{b}} = B^{-1}\boldsymbol{b} > 0$

定理. 非退化の仮定の下、単体法は有限回で停止.

$\because$ 非退化の仮定$\Rightarrow$単体法の各ステップで目的関数真に減少

実行可能基底の数は有限、高々$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

巡回：pivotingしていって同じ基底に戻る$\Rightarrow$無限ループ

退化が存在する場合、巡回が起こりうる

$\Leftarrow$ Blandの最少添字規則で巡回が起こらない

(多候補あれば最少添字の変数を選ぶ)

単体法：初期実行可能基底解

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\geq 0) \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

人口変数 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^m$

$\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$：

実行可能基底解

$$\min \quad 1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} A\boldsymbol{x} + I\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{s}$削除

最小値 $= 0$

$\Rightarrow$ そのときの基底は

元問題の実行可能基底

最小値 > 0

$\Rightarrow$ 元問題は実行可能解

をもたない

単体法:標準形に変換する

2変数以上の不等式　$(s_i : \mathrm{slack}$変数$)$

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \ge b_i \Rightarrow \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} - s_i = b_i,\ s_i \ge 0$$

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \le b_i \Rightarrow \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + s_i = b_i,\ s_i \ge 0$$

非負条件のない変数

$$x := x^+ - x^-,\quad x^+, x^- \ge 0$$

制約行列Aが行フルランクでない

$\Rightarrow$ 掃き出し等線形演算

単体法:計算量

- 最悪、指数時間
- 多項式時間のpivoting規則あるか?
  - 1大未解決問題

- 楕円体法、内点法:弱多項式時間