

# トーナメントグラフのトーリックイデアルの Gröbner 基底

石関 隆幸 今井 浩

東京大学大学院理学系研究科情報科学専攻  
〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1  
{ishizeki,imai}@is.s.u-tokyo.ac.jp

## 要旨

近年、トーリックイデアルを通して Gröbner 基底を組合せ論に適用する研究が行われている。逆に、グラフの性質を用いて Gröbner 基底に関する面白い知見が得られる可能性もある。そこで、グラフのトーリックイデアルについての研究が行われている。グラフを特化した場合でも、例えば既約 Gröbner 基底の要素数の解析はほとんど行われていない。本稿では、無閉路トーナメントグラフについて、ある項順序での Gröbner 基底を列挙し、要素数を解析する。また、一般の項順序に対する既約 Gröbner 基底の次数や要素数について解析する。最後に、このグラフの最短路問題への適用について考察する。

## Gröbner Bases for Toric Ideals of Tournament Graphs

Takayuki Ishizeki Hiroshi Imai

Department of Information Science, University of Tokyo  
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033, Japan  
{ishizeki,imai}@is.s.u-tokyo.ac.jp

## Abstract

Application of Gröbner bases to combinatorics through toric ideals has been studied in recent years. On the other hand, the properties of graphs may give insight for Gröbner bases. So the toric ideals of graphs have been studied. However, for special graphs, for example the number of elements of their reduced Gröbner basis have not been analyzed. In this paper we enumerate, for the case of acyclic tournament graphs, reduced Gröbner bases with respect to some term orders and analyze the number of elements. We also analyze the degree and the number of elements in reduced Gröbner bases with respect to general term orders. Finally, we discuss an application to the shortest path problem for acyclic tournament graphs.

## 1 Introduction

Gröbner 基底は計算代数学の中心であるとともに、様々な分野において効率的なアルゴリズムに応用されている。中でも、近年トーリックイデアルの離散性を用いて Gröbner 基底を組合せ論における計算困難な問題に適用する研究が行われている [3, 5, 11]。これにより、組合せ論と代数学がトーリックイデアルを通じて結び付いている。

例えば、グラフのトーリックイデアルについての研究が行われている。De Loera ら [5] は、無向完全グラフのトーリックイデアルについて解析し、三角形分割や整数計画への応用を行った。一方で、無閉路トーナメントグラフに対しては、トーリックイデアルの Gröbner 基底の要素はグラフのサーキットに対応し解析がしやすい。特に、任意の項順序における Gröbner 基底の和集合である universal Gröbner 基底 [12] はグラフのサーキット全体

の集合に対応し、要素数は指数オーダになる。

しかし、トーリックイデアルの Gröbner 基底については、次数は解析されている [10] もの、グラフのトーリックイデアルに特化した場合の次数や要素数の解析、さらにその応用といった研究はほとんどなされていない。

本稿では、グラフのトーリックイデアルを計算困難な問題に応用するための基礎研究として、無閉路トーナメントグラフのトーリックイデアルを解析する。これにより、一般のグラフに対するトーリックイデアルへの知見を得ることが目的である。

我々は、いくつかの項順序について、既約 Gröbner 基底を具体的に列挙することにより要素数が多項式オーダになることを示した。また、このグラフに対し、任意の項順序に対する Gröbner 基底の次数や要素数についての解析も行った。さらに、このグラフのトーリックイデアルの適用例として、ネットワークの最短路問題への応用について検討を行った。

本稿の構成は次の通りである。まず 2 節では、[4, 11] に基づいて、Gröbner 基底およびトーリックイデアルについての定義や性質を述べ、さらに本稿で考えるグラフとの対応を見る。3 節では、いくつかの項順序について既約 Gröbner 基底の要素を列挙し、要素数の解析を行う。4 節では、このグラフにおける既約 Gröbner 基底の次数の最大値、および要素数の最小値について示し、さらに要素数の最大値についての考察を行う。5 節では、Conti と Traverso [3] による、トーリックイデアルの Gröbner 基底を用いた整数計画問題に対するアルゴリズムを紹介し、このグラフの最短路問題への適用を説明する。最後に 6 節でまとめと今後の課題について述べる。

## 2 準備

本節では、[4, 11] に基づいて Gröbner 基底およびトーリックイデアルについて紹介する。

**定義 2.1** 変数のベクトル  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  と  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  に対して

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

と表す。  $\mathbf{a}$  を指数ベクトルという。

### 2.1 Gröbner 基底

体  $k$  上の多項式環  $k[\mathbf{x}] := k[x_1, \dots, x_n]$  を考える。

**定義 2.2**  $\mathbb{N}^n$  上の項順序  $\prec$  とは、  $\mathbb{N}^n$  上の全順序で

(1)  $0$  が唯一の最小元

(2)  $\alpha \succ \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \succ \beta + \gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ )

を満たすものである。これにより、多項式の項の順序が、指数ベクトルの項順序により定まる。多項式  $f \in k[\mathbf{x}]$  の項のうち順序最大のものを  $f$  の初項 (leading term) といい  $LT(f)$  で表す。

項順序の例をいくつか挙げる。

**定義 2.3** 変数の順序  $x_{i_1} \succ \cdots \succ x_{i_n}$  で誘導される辞書式順序とは、  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  の順に指数を並べた指数ベクトル  $\alpha, \beta$  について、

$$\alpha \succ \beta \iff \alpha - \beta \text{ の最も左の非零成分が正}$$

となる項順序のことである。

**定義 2.4** 変数の順序  $x_{i_1} \succ \cdots \succ x_{i_n}$  で誘導される次数つき辞書式順序とは、  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  の順に指数を並べたベクトル  $\alpha, \beta$  について、  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  と置いたとき、

$$\alpha \succ \beta \iff |\alpha| > |\beta| \text{ or } (|\alpha| = |\beta| \text{ and } \alpha \succ_{lex} \beta)$$

となる項順序のことである。ただし、  $\succ_{lex}$  は上の変数の順序で誘導される辞書式順序。

**定義 2.5**  $\omega \in \mathbb{R}^n$  を非負ベクトル、  $\prec$  を任意の項順序とすると、新しい項順序  $\prec_\omega$  を

$$\alpha \succ_\omega \beta \iff \omega \cdot \alpha > \omega \cdot \beta \text{ or } (\omega \cdot \alpha = \omega \cdot \beta \text{ and } \alpha \succ \beta)$$

で定めることができる。

項順序を固定すると、対応する既約 Gröbner 基底が定まる。

**定義 2.6**  $I \subset k[\mathbf{x}]$  をイデアルとする。  $I$  の項順序  $\prec$  に対する既約 Gröbner 基底とは、モニック (初項の係数が 1) な多項式の集合  $\mathcal{G}_\prec = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$  で

(i)  $\forall f \in I$  に対して  $\exists g_i \in \mathcal{G}_\prec$  が存在して  $LT(f)$  が  $LT(g_i)$  で割り切れる。

(ii)  $g_i$  のどの項も  $LT(g_j)$  で割り切れない。  
( $i \neq j$ )

となるものである。

命題 2.7 ([4]) 項順序  $<$  に対して、既約 Gröbner 基底は一意に定まる。

命題 2.8 ([4])  $I$  の Gröbner 基底は  $I$  の基底になっている。

定義 2.9 任意の項順序に対する  $I$  の既約 Gröbner 基底の和集合を  $I$  の universal Gröbner 基底という。

特に、項順序は無限個あるが、universal Gröbner 基底は有限集合になる。

## 2.2 トーリックイデアル

定義 2.10  $A \in \mathbb{Z}^{d \times n}$  に対して、準同型

$$\pi: k[x] \rightarrow k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}], \quad x_j \mapsto t^{a_j}$$

( $a_j$  は  $A$  の  $j$  列) を定める。  $\ker(\pi)$  を  $A$  のトーリックイデアル (toric ideal) といい、  $I_A$  で表す。

任意のベクトル  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$  はサポート (0 でない要素の添字集合) が共通部分を持たない非負ベクトル  $\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$  を用いて  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$  と一意に表せる。

補題 2.11 ([10])

$$I_A = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}_i^-} : \mathbf{u}_i \in \ker(A) \cap \mathbb{Z}^n, i = 1, \dots, s \rangle$$

特に、トーリックイデアルは有限個の二項式で生成される。

定理 2.12 ([10])

$$D := \max_{i=1, \dots, n} |a_i|$$

( $a_i$  は  $A$  の  $i$  列) とするとき、  $I_A$  の任意の既約 Gröbner 基底の多項式の次数は高々  $n(n-d)D^d$  となる。

## 2.3 無閉路トーナメントグラフのトーリックイデアル

$n$  点無閉路トーナメントグラフを  $D_n$  と置く。入次数が  $0, 1, 2, \dots, n-1$  の点に番号をそれぞれ  $1, 2, \dots, n$  とつける。枝  $(i, j)$  に変数  $x_{ij}$  を対応させ、  $D_n$  の接続行列のトーリックイデアル  $I_{D_n}$  を考える。

定義 2.13 本稿ではサーキットは始点以外の点を 2 回以上通らない閉路とする。

定義 2.14  $\mathbf{u} \in \ker(\pi)$  がサーキットであるとは、

(1) サポート  $\text{supp}(\mathbf{u}) = \{i : u_i \neq 0\}$  が包含関係について極小。

(2)  $\mathbf{u}$  の非零要素が互いに素。

を満たすこと。サーキット  $\mathbf{u}$  に対して、

$$\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$$

を  $I_A$  のサーキットという。  $I_A$  のサーキット全体の集合を  $\mathcal{C}_A$  で表す。

定義 2.15 グラフのサーキット  $C$  に適当に向きをつけ、  $C$  上の枝で向きが  $C$  の向きと同じものの集合を  $C^+$ 、逆向きのものの集合を  $C^-$  とおく。このとき、  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$  ( $E$  はグラフの枝の集合) で、

$$\mathbf{x}_e = \begin{cases} 1 & \text{if } e \in C^+ \\ -1 & \text{if } e \in C^- \\ 0 & \text{if } e \notin C \end{cases} \quad (e \in E)$$

としたものを  $C$  の接続ベクトルという。

補題 2.16 ([1])  $I_A$  のサーキットは、グラフのサーキットの接続ベクトルに対応する。

定義 2.17 二項式  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in I_A$  が primitive であるとは、  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}^-} \in I_A$  で、  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}^+}$  が  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+}$  を、  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}^-}$  が  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$  を割りきるようなものが存在しないことである。  $I_A$  の primitive な二項式の集合を  $A$  の Graver 基底といい、  $Gr_A$  で表す。

命題 2.18 ([11])  $I_A$  の universal Gröbner 基底を  $\mathcal{U}_A$  で表すと、  $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{U}_A \subseteq Gr_A$  。

命題 2.19 ([11])  $A$  が unimodular 行列 (単模行列) のとき、  $\mathcal{C}_A = \mathcal{U}_A = Gr_A$  。

命題 2.20 ([11] Exercise 4(8))  $D_n$  の接続行列に対しては、  $\mathcal{C}_{D_n} = \mathcal{U}_{D_n}$  。

証明：命題 2.18 より、  $\mathcal{C}_{D_n} = Gr_{D_n}$  を示せばよい。

$\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-} \in I_{D_n}$  がサーキットでないとする。このとき、サーキットの定義から、サーキット  $\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^- \in I_{D_n}$  が存在して、

$$\text{supp}(\mathbf{c}^+) \subseteq \text{supp}(\mathbf{u}^+), \quad \text{supp}(\mathbf{c}^-) \subseteq \text{supp}(\mathbf{u}^-)$$

となる。補題 2.16 より、  $\mathbf{c}^+, \mathbf{c}^-$  の要素は 0 か 1 だから、  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}^+}, \mathbf{x}^{\mathbf{u}^-}$  はそれぞれ  $\mathbf{x}^{\mathbf{c}^+}, \mathbf{x}^{\mathbf{c}^-}$  で割り切れる。したがって、  $\mathbf{u}$  は primitive でない。 ■

系 2.21  $I_{D_n}$  の universal Gröbner 基底は  $D_n$  の全てのサーキットに対する二項式の集合になる。

系 2.22  $I_{D_n}$  の universal Gröbner 基底の要素数は指数オーダ。

## 2.4 例 $-D_4$

例 2.23  $D_4$  において、

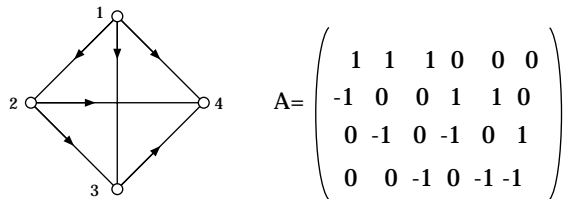


図 1:  $D_4$  の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例えば、 $(1, -1, 0, 1, 0, 0) \in \ker(A)$  となり、これはサーキット 1, 2, 3, 1 (枝では 12, 23, 31) に対応する。これより、 $x_{12}x_{23} - x_{13} \in I_{D_4}$  となる。

実際に、Gröbner 基底を計算してみる。項順序を

$$x_{12} \succ x_{13} \succ x_{14} \succ x_{23} \succ x_{24} \succ x_{34}$$

から誘導される辞書式順序とすると、既約 Gröbner 基底は

$$\{x_{12}x_{23} - x_{13}, x_{12}x_{24} - x_{14}, x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}, x_{13}x_{34} - x_{14}, x_{23}x_{34} - x_{24}\}$$

となり、要素数は 5、次数は 2 となる。

一方、項順序を

$$x_{13} \succ x_{24} \succ x_{23} \succ x_{34} \succ x_{12} \succ x_{14}$$

から誘導される辞書式順序とすると、既約 Gröbner 基底は

$$\{x_{12}x_{23}x_{34} - x_{14}, x_{24} - x_{23}x_{34}, x_{13} - x_{12}x_{23}\}$$

となり、要素数は 3、次数は 3 となる。

$D_4$  に対応する universal Gröbner 基底を計算すると、

$$\{x_{12}x_{23}x_{34} - x_{14}, x_{12}x_{23} - x_{13}, x_{12}x_{24} - x_{13}x_{34}, x_{12}x_{24} - x_{14}, x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}, x_{13}x_{34} - x_{14}, x_{23}x_{34} - x_{24}\}$$

となり、グラフのサーキット全体と対応していることがわかる。

## 3 ある項順序に対する既約 Gröbner 基底

本節では、いくつかの項順序に対する既約 Gröbner 基底の要素が具体的に列挙できることを示す。これにより、universal Gröbner 基底のレベルでは指数オーダであったのが、いくつかの項順序に対する既約 Gröbner 基底のレベルでは多項式オーダになることがわかる。

注意 3.1 本節では、二項式の初項に下線をつける。

定理 3.2  $k[x]$  の項順序を、変数の順序

$$x_{ij} \succ x_{kl} \iff i < k \text{ or } (i = k \text{ and } j < l)$$

から誘導される辞書式順序とする。このとき、

(i)  $G$  の任意の 3 点  $i < j < k$  に対して

$$g_{ijk} := \underline{x_{ij}x_{jk}} - x_{ik}$$

(ii)  $G$  の任意の 4 点  $i < j < k < l$  に対して

$$g_{ijkl} := \underline{x_{ik}x_{jl}} - x_{il}x_{jk}$$

とする (図 2) と、この項順序に対する  $I_{D_n}$  の既約 Gröbner 基底  $\mathcal{G}_1$  は

$$\mathcal{G}_1 = \{g_{ijk} : 1 \leq i < j < k \leq n\} \cup \{g_{ijkl} : 1 \leq i < j < k < l \leq n\}$$

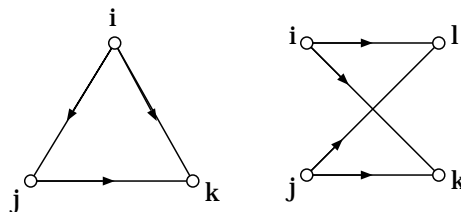


図 2: (i) に対応するサーキット  $i, j, k, i$  (左) と (ii) に対応するサーキット  $i, k, j, l, i$  (右)

証明: 長さ 3 のサーキットに対応する二項式は  $\mathcal{G}_1$  の (i) に含まれる。

$G$  の 4 点  $i < j < k < l$  に対して、この 4 点からなるサーキットは

$$(a) i, j, k, l, i, (b) i, j, l, k, i, (c) i, k, j, l, i$$

のどれかになる。

(a) に対応する二項式は  $x_{ij}x_{jk}x_{kl} - x_{il}$  となり、この初項は  $\text{LT}(g_{ijk})$  で割りきれぬ。同様に (b) に対応する二項式の初項も  $\text{LT}(g_{ijl})$  で割りきれぬ。(c) に対応する二項式は  $\mathcal{G}_1$  の (ii) に含まれる。

長さ5以上のサーキット  $C$  を考える。 $C$  上の番号最小の点を  $i_1$  とし、 $C := i_1, i_2, \dots, i_m, i_1$  ( $i_2 < i_m$ ) とする。 $C$  に対応する二項式  $f_C$  の初項は、 $C$  で  $(i_1, i_2)$  と同じ向きの枝に対応する変数の積になる。

$i_2 < i_3$  のとき、枝  $(i_1, i_2), (i_2, i_3)$  は  $C$  上で同じ向きだから、 $x_{i_1 i_2}, x_{i_2 i_3}$  はともに  $\text{LT}(f_C)$  に現れる。よって、 $\text{LT}(f_C)$  は  $\text{LT}(g_{i_1 i_2 i_3})$  で割りきれぬ。

$i_2 > i_3$  のとき、 $i_2 < i_m$  より  $i_3 < i_2 < i_m$  となるから、ある  $3 \leq k < m$  が存在して  $i_1 < i_k < i_2 < i_{k+1}$  となる。すると、 $x_{i_1 i_2}, x_{i_k i_{k+1}}$  はともに  $\text{LT}(f_C)$  に現れるから、 $\text{LT}(f_C)$  は  $\text{LT}(g_{i_1 i_k i_2 i_{k+1}})$  で割りきれぬ。

また、任意の  $g_{ijk}, g_{ijkl}$  のどの項も、他の  $\mathcal{G}_1$  の二項式の初項で割りきれぬ。したがって、 $\mathcal{G}_1$  は既約 Gröbner 基底。 ■

系 3.3 定理 3.2 の条件において、既約 Gröbner 基底の要素数は  $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ 。

定理 3.4  $k[x]$  の項順序を、変数の順序

$$x_{ij} \succ x_{kl} \iff i < k \text{ or } (i = k \text{ and } j > l)$$

から誘導される辞書式順序とする。この順序に対する  $I_{D_n}$  の既約 Gröbner 基底  $\mathcal{G}_2$  は、全域木

$$T := \{(i, i+1) : 1 \leq i < n\}$$

に対する基本サーキットに対応する二項式の集合となる。つまり、

$$\mathcal{G}_2 = \{g_{ij} : 1 \leq i < n-1, i+1 < j \leq n\}$$

$$g_{ij} := x_{ij} - x_{i,i+1}x_{i+1,i+2} \cdots x_{j-1,j}$$

となる。

証明：  $T$  に対する基本サーキットでないサーキット  $C$  を取る。 $C$  上の番号最小の点を  $i_1$  とし、 $C := i_1, i_2, \dots, i_m, i_1$  ( $i_2 < i_m$ ) とする。このとき、 $C$  に対応する二項式  $f_C$  の初項は  $x_{i_1 i_m}$  を含む。よって、 $\text{LT}(f_C)$  は  $\text{LT}(g_{i_1 i_m})$  で割りきれぬ。

$g_{ij}$  の初項は  $T$  に含まれない枝に対応し、もう一方の項は  $T$  に含まれるいくつかの枝に対応している。よって、 $g_{ij}$  のどの項も  $\text{LT}(g_{kl})$  ( $(k, l) \neq (i, j)$ ) で割りきれぬから、 $\mathcal{G}_2$  は既約 Gröbner 基底になる。 ■

系 3.5 定理 3.4 の条件において、既約 Gröbner 基底の要素数は  $\binom{n}{2} - (n-1)$ 。

定理 3.6  $k[x]$  の項順序を、変数の順序

$$x_{ij} \succ x_{kl} \iff j < l \text{ or } (i = k \text{ and } i < k)$$

から誘導される辞書式順序とする。この順序に対する  $I_{D_n}$  の既約 Gröbner 基底は、定理 3.2 の  $\mathcal{G}_1$  と同じ集合になる。

証明：長さ3、4のサーキットについては、定理 3.2 と同様に示せる。

長さ5以上のサーキット  $C$  を考える。 $C$  上の番号最小の点を  $i_1$  とし、 $C := i_1, i_2, \dots, i_m, i_1$  ( $i_2 < i_m$ ) とする。また、

$$T_C := \{i_s \in C : i_{s-1} < i_s\}$$

$$\cup \{i_s \in C : i_{s+1} < i_s\}$$

とおき、 $T_C$  で番号最小の点を  $i_k$  とおく。ただし、 $i_{m+1} = i_1$  とする。 $C$  に対応する二項式を  $f_C$  とする。

$k=2$  のときは、枝  $(i_1, i_2)$  が  $\text{LT}(f_C)$  に現れる。よって、定理 3.2 と同様に示せる。

$k \neq 2$  のときを考える。 $i_{k-1} < i_k < i_{k+1}$  の

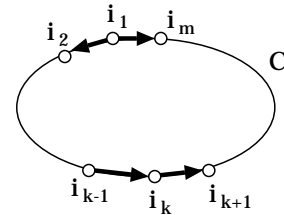


図 3:  $i_{k-1} < i_k < i_{k+1}$  のとき

とき (図 3)、 $k$  の取り方から、 $x_{i_{k-1} i_k}, x_{i_k i_{k+1}}$  はともに  $\text{LT}(f_C)$  に現れる。よって、 $\text{LT}(f_C)$  は  $\text{LT}(g_{i_{k-1} i_k i_{k+1}})$  で割り切れる。

( $i_{k+1} < i_k < i_{k-1}$  のときも同様に示せる。)

$i_{k-1} < i_k$  かつ  $i_{k+1} < i_k$  のときを考える (図 4)。

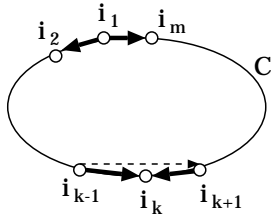


図 4:  $i_{k-1} < i_{k+1} < i_k$  のとき (点線は  $C$  上にない点)

$i_{k-1} < i_{k+1}$  と仮定する。( $i_{k+1} < i_{k-1}$  のときも同様に示せる。) このとき、 $k$  の定義から  $x_{i_1 i_2}, x_{i_{k-1} i_k}$  はともに  $LT(f_C)$  に現れる。

もし  $i_{k+2} < i_{k+1}$  ( $i_{m+2} = i_2$  とする) とすると、 $i_{k+2} < i_{k+1} < i_k$  となり、 $i_{k+1}$  が  $k$  の取り方に矛盾し、 $i_{k+1} < i_{k+2} < i_k$  とすると、 $i_{k+2}$  が  $k$  の取り方に矛盾する (図 5)。よ

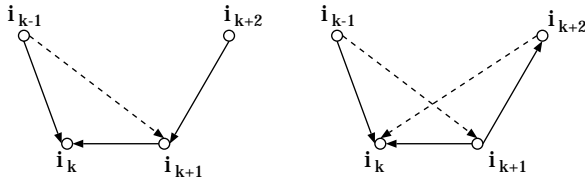


図 5:  $i_{k+1}$  (左)  $i_{k+2}$  (右) が矛盾

て、 $i_{k-1} < i_{k+1} < i_k < i_{k+2}$  だから、 $x_{i_{k-1} i_k}, x_{i_{k+1} i_{k+2}}$  はともに  $LT(f_C)$  に現れるから、 $LT(f_C)$  は  $LT(g_{i_{k-1} i_k i_{k+1} i_{k+2}})$  で割り切れる。

$\mathcal{G}_1$  の既約性は、定理 3.2 で示した。 ■

定理 3.7  $k[x]$  の項順序を、変数の順序

$$x_{ij} \succ x_{kl} \iff i < k \text{ or } (i = k \text{ and } j < l)$$

から誘導される次数つき辞書式順序とする。この順序に対する  $ID_n$  の既約 Gröbner 基底は、定理 3.2 の  $\mathcal{G}_1$  と同じ集合になる。

証明：長さ 3、4 のサーキットについては、定理 3.2 と同様に示せる。

長さ 5 以上のサーキット  $C$  を考える。 $C$  上の番号最小の点を  $i_1$  とし、 $C := i_1, i_2, \dots, i_m, i_1$  とする。ただし、 $C$  を  $i_1$  から  $i_2$  の方向に向きつけたときに、同じ向きの枝の数の方が逆の向きの枝の数以上になるように  $i_2$  を取る。(等しくなるときに

は、 $i_2 < i_m$  とする。)  $C$  に対応する二項式を  $f_C$  とする。

$i_{k-1} < i_k < i_{k+1}$  となる  $k$  が存在するとき、 $x_{i_{k-1} i_k}, x_{i_k i_{k+1}}$  は  $LT(f_C)$  に現れる。よって、 $LT(f_C)$  は  $LT(g_{i_{k-1} i_k i_{k+1}})$  で割り切れる。

$i_{k-1} < i_k < i_{k+1}$  となる  $k$  が存在しないとすると (図 6)。このとき、 $i_2$  の取り方から、 $C$  を  $i_1$  から  $i_2$  の方向に向きつけたときに、同じ向きの枝の数と逆の向きの枝の数が等しくなる。よって、 $i_2 < i_m$  となる。

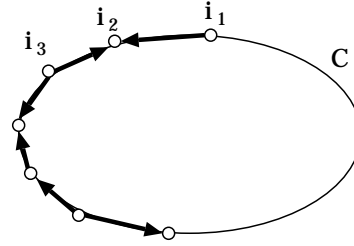


図 6: ( $i_1, i_2$ ) と同じ向きの枝の間には必ず逆向きの枝がある。

特に、 $i_3 < i_2 < i_m$  となるから、ある  $3 \leq k < m$  が存在して  $i_1 < i_k < i_2 < i_{k+1}$  となる。すると、 $x_{i_1 i_2}, x_{i_k i_{k+1}}$  はともに  $LT(f_C)$  に現れるから、 $LT(f_C)$  は  $LT(g_{i_1 i_k i_2 i_{k+1}})$  で割り切れる。

既約性は定理 3.2 で示した。 ■

#### 4 既約 Gröbner 基底の要素数および次数の解析

前節では、いくつかの項順序に対する既約 Gröbner 基底のレベルでは多項式オーダになることを示した。我々は任意の項順序に対して、要素数が多項式オーダになるのか調べている。本節では、既約 Gröbner 基底の要素数や次数についてのいくつかの考察を述べる。

$n$	変数の数	既約 GB	最大要素	最小要素	最大次数
4	6	10	5	3	3
5	10	211	15	6	4
6	15	48312	37	10	5

表 1: TiGERS [6] による  $n = 4, 5, 6$  での結果

表 1 は、全ての既約 Gröbner 基底を列挙するプログラム TiGERS [6, 7] によって、

$D_4, D_5, D_6$  について既約 Gröbner 基底の数、要素数の最大値と最小値、および要素の次数の最大値を計算した結果である。

トーリックイデアルの Gröbner 基底の次数については、定理 2.12 で示したように指数オーダになるが、系 2.21 より次が示せる。

定理 4.1  $I_{D_n}$  に対しては、任意の既約 Gröbner 基底の要素の次数は高々  $n - 1$  になる。

証明：  $D_n$  内の任意のサーキットは長さが高々  $n$  である。一方、グラフが無閉路だから、 $n$  本の枝のうち、同じ向きの枝は高々  $n - 1$  本。よって、次数は高々  $n - 1$  になる。 ■

一方、要素数については、最小値については定理 3.4 の  $\mathcal{G}_2$  がちょうどグラフのサイクル空間の次元になっていることから次が示せる。

定理 4.2  $I_{D_n}$  に対する既約 Gröbner 基底の要素数の最小値は  $\binom{n}{2} - (n - 1)$  である。

証明：命題 2.8 より、既約 Gröbner 基底の要素数はサイクル空間の次元以上になる。 $\mathcal{G}_2$  がこの最小値を与える例になっている。 ■

既約 Gröbner 基底の数、および要素数の最大値の上限についてはまだ解析ができていない。表 1 から分かるように、定理 3.2 の  $\mathcal{G}_1$  が  $n = 4, 5$  のときは要素数最大、 $n = 6$  の時も最大値に近い。しかし、 $n = 6$  のときの要素数最大になるのがどのような項順序のときかはわかっていない。

一方で、既約 Gröbner 基底の数自身は上限、下限ともわかっていない。表 1 から、辞書式順序の数、つまり変数の数の階乗よりはるかに少ないものの、表を見る限り  $n$  に対して爆発的に増加していると思われる。

どちらも解析は非常に難しいと思われる。これに対するアプローチとしては、state polytope [2] という、頂点が既約 Gröbner 基底に対応する多面体の探索法 [6, 7] の改良、可換環論からのアプローチ [9]、グラフ理論や最適化問題からのアプローチなどが考えられる。

## 5 最短路問題との対応

本節では、 $D_n$  のトーリックイデアルの Gröbner 基底が最短路問題に応用できることを見る。

### 5.1 Conti-Traverso のアルゴリズム

Conti-Traverso [3] は、トーリックイデアルの Gröbner 基底を用いて整数計画問題を解くアルゴリズムを示した。

ここでは、次の形の整数計画問題を考える。

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

$$A \in \mathbb{Z}^{d \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

アルゴリズム 5.1 ([3]) この整数計画問題を解くアルゴリズム。

1.  $A$  のトーリックイデアル  $I_A$  の  $\prec_\omega$  に対する既約 Gröbner 基底  $\mathcal{G}_{\prec_\omega}$  を計算する。
2.  $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$  を任意に求める。
3.  $\mathcal{G}_{\prec_\omega}$  により  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  を簡約する。簡約して  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  になったとき、 $\mathbf{v}$  が最適解。

### 5.2 最短路問題への適用

$D_n$  の各枝  $(i, j)$  長さを  $w_{ij}$  としたとき、点 1 から他の各点への最短路を求める問題を考える [8]。この問題は、各枝の容量が無量大、コストが  $w_{ij}$  としたときに、点 1 から流量  $n - 1$  を流入し、点  $2, \dots, n$  からそれぞれ流量 1 を流出させるときの最小費用流に対応する。

これは次のように定式化できる。 $D_n$  の接続行列を  $A_n$  としたとき、

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & A_n \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

すると、Conti-Traverso のアルゴリズムを適用することにより、点 1 から各点への最短路を求めることができる。

ここで、Conti-Traverso のアルゴリズムの簡約の操作は、対応するサーキットの中で、より短い経路を選ぶことに対応する。 $D_3$  の例を見る。各枝の長さによって、 $I_{D_3}$  の既約 Gröbner 基底  $x_{12}x_{23} - x_{13}$  の初項が変わる。例えば、 $w_{12} = 1$ 、 $w_{13} = 4$ 、 $w_{23} = 2$  のとき、初項は  $-x_{13}$  になる。これは、簡約の操作により、点 1 から点 3 に行くには点 2 を

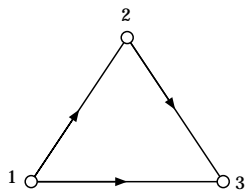


図 7:  $D_3$  の図

経路して行く方が近いことを意味する。逆に、 $w_{12} = 2$ 、 $w_{13} = 3$ 、 $w_{23} = 2$  のとき、初項は  $x_{12}x_{23}$  になり、簡約の操作から、点 1 から直接点 3 に行く方が近いことを意味する。

## 6 まとめと今後の課題

本稿では、無閉路トーナメントグラフのトーリックイデアルに対して、ある項順序での既約 Gröbner 基底が具体的に列挙でき、それにより Gröbner 基底の要素数が多項式オーダに抑えられることを示した。また、無閉路トーナメントグラフに特化した場合について、Gröbner 基底の次数の最大値や要素数の最小値を示した。さらに、最短路問題にトーリックイデアルを適用することについて述べた。

今回は、Gröbner 基底の要素数の最大値、および既約 Gröbner 基底の数については解析ができなかった。これについて今後行い、さらにその結果を組合せ論のアルゴリズムに適用し、また三角形分割等の数学的な知見を得ることが課題である。また、逆にグラフの性質から Gröbner 基底の新たな知見を得ること、さらに、無閉路とは限らないトーナメントグラフや完全二部グラフなどについての解析も今後行いたい。

## 謝辞

本稿に際し、有益なコメントを頂いた東京大学の竹内史比古氏に感謝致します。今井の研究は文部省科学研究費の援助を受けて行われた。

## 参考文献

- [1] A. Bachem and W. Kern. *Linear Programming Duality*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [2] D. Bayer and I. Morrison. *Standard Bases and Geometric Invariant Theory*

I, Initial Ideals and State Polytopes. *J. of Symbolic Computation*, **6**(1988), pp. 209–217.

- [3] P. Conti and C. Traverso. Buchberger Algorithm and Integer Programming. *Proceedings AAECC-9* (New Orleans), Springer, LNCS **539**(1991), pp. 130–139.
- [4] D. A. Cox, J. B. Little and D. B. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [5] J. A. de Loera, B. Sturmfels and R. R. Thomas. Gröbner Bases and Triangulations of the Second Hypersimplex. *Combinatorica*, **15**(1995), pp. 409–424.
- [6] B. Huber and R. R. Thomas. TiGERS. [http://www.math.tamu.edu/~rekha/TiGERS\\_0.9.uu](http://www.math.tamu.edu/~rekha/TiGERS_0.9.uu)
- [7] B. Huber and R. R. Thomas. Computing Gröbner Fans of Toric Ideals. *MSRI Preprint* No. 1999-032, MSRI, June 1999.
- [8] 茨木俊秀. 離散最適化法とアルゴリズム. 岩波講座 応用数学 [方法 8], 岩波書店, 1993.
- [9] L. Robbiano. Bounds for Degrees and Number of Elements in Gröbner Bases. *Proceedings AAECC-8* (Tokyo), Springer, LNCS **508**(1991), pp. 292–303.
- [10] B. Sturmfels. Gröbner Bases of Toric Varieties. *Tôhoku Mathematical Journal*, **43**(1991), pp. 249–261.
- [11] B. Sturmfels. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. American Mathematical Society University Lecture Series, **8**, Providence, RI, 1995.
- [12] V. Weispfenning. Constructing Universal Gröbner Bases. *Proceedings AAECC-5* (Menorca), Springer, LNCS **356**(1989), pp. 408–417.