

# 量子検索の幾何的解釈

加藤公一

(東京大学大学院情報理工学研究所、日本ユニシス株式会社)

2005年11月30日 今井研セミナー発表

## 1 Introduction

やりたいこと

- 量子状態 (特に pure states) のなす空間の幾何的構造を知りたい
- 量子検索 (Quantum search) の幾何的な意味を知りたい
- 幾何的構造を知ることで、アルゴリズムの改良などが考えられないか？

本稿で説明するのはほとんどが Miyake–Wadati[8] の結果である。また、今までのセミナー発表の反省に立って、数学的対象の説明を多めにしている。

## 2 Preliminaries

### 2.1 射影空間と代数多様体

ここでは、代数幾何における基本的な言葉をいくつか定義する。代数幾何の基本的な教科書 ([3] など) を参照のこと。

以下  $K$  を  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  とする (多くの場合、一般の体としてもいいのだが)。

**Definition 1**  $K^N$  上で既約多項式の集合  $\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_N)\}_{i=1}^M$  が与えられたとき、この零点集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in K \mid f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0\} \quad (1)$$

をアフィン代数多様体 (*affine algebraic variety*) と呼ぶ。

特に variety は、いたるところで微分可能なとき、つまり Jacobian  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N)$  が full rank のとき、 $C^\infty$  級多様体 (manifold) になる。variety の点で Jacobian が full rank にならない点を特異点 (singular point) と呼ぶ。つまり、特異点を持たない variety が manifold である。

**Definition 2** 射影空間  $\mathbb{P}_K^N$  は、 $\mathbb{P}_K^N = (K^{N+1} - \{(0, \dots, 0)\}) / \sim$  によって定義される。ただし、ここで同値関係  $\sim$  を以下のように定義するものとする。

$$\forall a \neq 0 \in K, (x_0, x_1, \dots, x_N) \sim (ax_0, ax_1, \dots, ax_N) \quad (2)$$

射影空間  $\mathbb{P}_K^N$  上の点はこの代表元  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$  によってあらわされる。特に射影空間であることを強調する場合には  $(x_0 : x_1 : \dots : x_N)$  と表記することもある (「比が同じであれば同じ点であるという気持ち」が現れるので、こちらのほうが直感的にわかりやすいかもしれない)。

**Definition 3** 射影空間と区別するため、 $K^N$  をアフィン空間と呼ぶ。特に  $\mathbb{A}_K^N$  と表記することもある。

射影空間は次のように考えることで、アフィン空間の「張り合わせ」と考えることができる。つまり、 $x_0 \neq 0$  のときに全座標を  $x_0$  で割ってやることにより、

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_N) = \left( 1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_N}{x_0} \right) \quad (3)$$

となるので、 $\xi_1^{(0)} = x_1/x_0, \dots, \xi_N^{(0)} = x_N/x_0$  とおくことにより、アフィン空間  $K^N$  と同型とみなせる。つまり、

$$\mathbb{P}_K^N - \{x_0 = 0\} \simeq K^N \quad (4)$$

これは  $x_i \neq 0$  のときも同様なことが言えて、

$$(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)}) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_j}{x_i}, \dots, \frac{x_N}{x_i} \right) \quad (5)$$

( $i$  は除外を表す) と定義することで、 $N+1$  個の座標系  $(\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)}), \dots, (\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_N^{(N)})$  が定義できる。このときの座標変換は、 $i < j$  として、

$$\xi_k^{(j)} = \begin{cases} \xi_k^{(i)} / \xi_j^{(i)} & (k < i, j \leq k) \\ 1 / \xi_j^{(i)} & (k = i) \\ \xi_{k-1}^{(i)} / \xi_j^{(i)} & \end{cases} \quad (6)$$

によって定義される。

また射影空間を ray の集合と見ることもできる。つまり、 $K^N$  上の ray を原点から伸びる半直線 (ただし原点を含まない) とすると、 $\mathbb{P}_K^{N-1}$  を定義する際に考える同値関係は ray 上の点を同一視することに対応する。

射影空間上でもアフィン空間と同様に、variety を定義する。射影空間上の variety を定義するには、多項式が斉次でなければならない。斉次多項式とは同一次数の単項式の和として表される多項式である。あとは同様に、斉次多項式の集合  $\{f_i(x_0, x_1, \dots, x_N)\}_{i=1}^M$  が与えられたとき、

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_N) \in K \mid f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0\} \quad (7)$$

を射影代数多様体 (projective algebraic variety) と呼ぶ。

**Example 1**  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^1$  を考える。これは、 $(x_0, x_1)$  により表現され、 $\xi^{(0)} = x_0/x_1, \xi^{(1)} = x_1/x_0$  という座標系で  $\mathbb{A}_\mathbb{R}^1$  を 2 つ張り合わせたものと考えることができる。また、座標変換は  $\xi^{(1)} = 1/\xi^{(0)}$  である。

このとき、 $\xi^{(1)} = 0$  に対応する点は座標系  $\xi^{(0)}$  では存在せず、 $\xi^{(0)} = 0$  に対応する点は座標系  $\xi^{(1)}$  では存在しない。それら以外の点については、2 つの座標系で 1 対 1 に対応する。

$U_i = \{\xi^{(i)} \in \mathbb{R}\}$  として、以上のことをまとめると、

$$\mathbb{P}_\mathbb{R}^1 = U_0 \cup U_1 \quad (8)$$

$$U_0 \cap U_1 = U_0 - \{\xi^{(0)} = 0\} = U_1 - \{\xi^{(1)} = 0\} \quad (9)$$

$$U_0 - U_1 = \{\xi^{(0)} = 0\} \quad (10)$$

$$U_1 - U_0 = \{\xi^{(1)} = 0\} \quad (11)$$

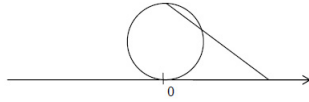


図 1:  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

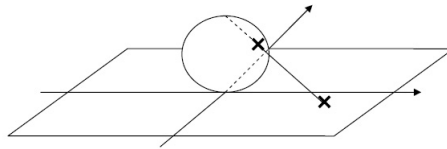


図 2:  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

となる。これはすなわち、 $U_0$  に点  $\xi^{(1)} = 0$  を加えたものが  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  だと見ることができる。点  $\xi^{(1)} = 0$  を、座標系  $0$  に対する無限遠点だとみなして考えると都合がよいことが多い。つまり  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  を  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  と思うということである。

また位相的には次のように考えることもできる。数直線上の原点  $0$  に接する円を描き、その円上でちょうど  $0$  と反対側の点を  $A$  とする。数直線上の点  $x$  と、 $A$  と  $x$  を結ぶ直線と円の交点を同一視する。このとき、 $x \rightarrow \pm\infty$  のとき円上の対応点は限りなく  $A$  に近づく。したがって、この対応関係により、 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  は  $1$  次元球面  $S_{\mathbb{R}}^1$  (つまり「輪」) と同相であることがわかる (図 1)。

また、ray を考える。原点を中心とする単位円と ray の交点を考えると、交点と ray は一対一に対応する。つまり、こう考えても輪と同相であることがいえた。

**Example 2**  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  を考える。これは  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  のときとほとんど同じように考えることができる。つまり、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  は  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  に無限遠点を加えたものと見ることができる。

また、複素平面上の原点に接するように球を置いて考えることで、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  は  $2$  次元球面  $S_{\mathbb{R}}^2$  と同相であることがわかる (図 2)。

**Example 3**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  を考える。これも、 $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  に無限遠点を加えたものと考えたいが、この場合の無限遠点は  $1$  点にはならない。斉次座標  $(x_0, x_1, x_2)$  に対して、 $\xi_1^{(0)} = x_1/x_0, \xi_2^{(0)} = x_2/x_0$  となるが、この第  $0$  座標系によって表現できない点の集合は、 $(0, x_1, x_2)$  であらわされるので一点ではない。例えば、 $(0, 1, 0)$  は  $(a, 1, 0)$  から  $a \rightarrow 0$  の極限と考えられるが、これは  $\xi_1^{(0)} = 1/a, \xi_2^{(0)} = 0$  であり、 $a \rightarrow 0$  は  $\xi_1^{(0)} \rightarrow \infty$  に対応する。同様に  $\xi_1^{(0)} = 0, \xi_2^{(0)} \rightarrow \infty$  としたものが斉次座標の  $(0, 0, 1)$  だと思えることができる。つまり第  $0$  座標系では、 $(\infty, 0)$  が元の  $(0, 1, 0)$  に対応し、 $(0, \infty)$  が元の  $(0, 0, 1)$  に対応すると思えることができる。

次に  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  の variety として次のようなもの考える。

$$x_0 x_1 = x_2^2 \quad (12)$$

これは斉次多項式になっている。これは、 $3$  つの座標系ではそれぞれ次のように表現される。

$$\xi_1^{(0)} = \xi_2^{(0)2} \quad (13)$$

$$\xi_1^{(1)} = \xi_2^{(1)2} \quad (14)$$

$$\xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} = 1 \quad (15)$$

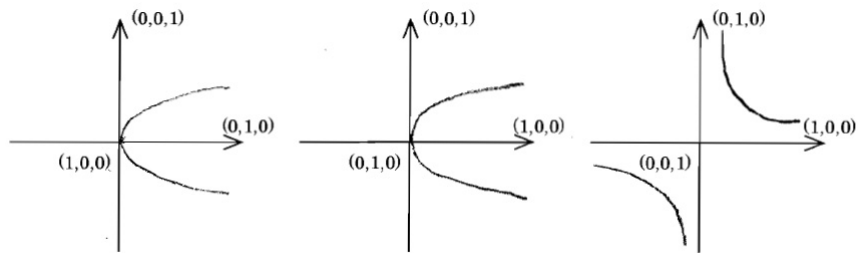


図 3:  $x_0 x_1 = x_2^2$

このとき、第 0 座標系の点  $\xi^{(0)} = (0, 0)$  は第 1 座標系と第 2 座標系では無限遠に対応する。第 1 座標系の点  $\xi^{(1)} = (0, 0)$  は第 0 座標系と第 2 座標系では無限遠に対応する (図 3)。

例えば非斉次多項式

$$x_0 = x_1^2 \tag{16}$$

を満たす集合を考えても、全く面白くないことがわかる。実際、任意の点  $(x_0, x_1, x_2)$  が与えられたときに  $(x_0, x_1, x_2) = (ax_0, ax_1, ax_2)$  だから  $ax_0 = (ax_1)^2$  を計算して  $x_0 = ax_1^2$  となる。これは  $x_1 = 0$  かつ  $x_0 \neq 0$  でない限りはこのような  $a$  を決めることができる。これでは面白くないので、*variety* と呼ばない。

**Example 4**  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  上の *variety* として

$$x^2 + y^2 - yz = 0 \tag{17}$$

を考える。これは各アフィン座標での切り口を見ると次のような式が現れる。

$$1 + u^2 - uv = 0 \tag{18}$$

$$u^2 + 1 - v = 0 \tag{19}$$

$$u^2 + v^2 - v = 0 \tag{20}$$

これはそれぞれ、双曲線、放物線、楕円(円)になっている (図 4)。これは、高校で習った(?) 2 次曲線が、射影空間上で考えると実はすべて同じものであることを意味している。

## 2.2 量子状態と entanglement

以下、 $\mathbb{C}^n$  がなす Hilbert 空間を  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$  と書くことにする。純粋量子状態  $|\psi\rangle$  は、一般に基底ベクトル  $\{|j\rangle\}_{j=0}^{n-1}$  と  $a_j \in \mathbb{C}$  によって次のようにあらわされる。

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} a_j |j\rangle \tag{21}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2 = 1 \tag{22}$$

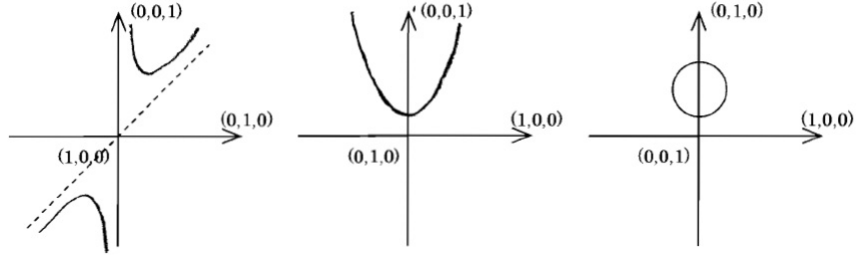


図 4:  $x^2 + y^2 - yz = 0$

また、定数分の違いは無視する。つまり、任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$e^{ix} \sum_{j=0}^{n-1} a_j |j\rangle \sim \sum_{j=0}^{n-1} a_j |j\rangle \quad (23)$$

ということである。これはつまり、純粋量子状態は  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$  上の点と一対一に対応するということである。

実際、 $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$  を考えると、全体を  $z_0(1 + |z_1/z_0| + \dots + |z_{n-1}/z_0|)$  で割ることにより特に  $\sum |z_j| = 1, \text{Im}z_0 = 0$  となるような代表元が唯一存在する。このとき  $\sum z_j |j\rangle$  は純粋量子状態であり、 $(z_0, \dots, z_{n-1}) \neq (z'_0, \dots, z'_{n-1})$  ならば  $\sum z_j |j\rangle \neq \sum z'_j |j\rangle$  である。

一般に  $N$ -qubit の量子状態は  $\mathcal{H}(\mathbb{C})^{\otimes N}$  上の点であらわされるが、特に  $\psi \in \mathcal{H}^{\otimes N}$  が  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$  によって、 $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$  とあらわされるとき、 $|\psi\rangle$  を separable state と呼ぶ。separable でないものを entangled state と呼ぶ。

**Definition 4** 写像  $f: \mathbb{P}_K^m \times \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^{(m+1)(n+1)-1}$  で、次の式で定義されるものを Segre 埋め込み (Segre embedding) と呼ぶ。

$$f: ((x_0, \dots, x_m), (y_0, \dots, y_n)) \mapsto (x_0y_0, \dots, x_0y_n, x_1y_0, \dots, x_1y_n, \dots, x_my_0, \dots, x_my_n) \quad (24)$$

**Theorem 1** Segre embedding の像は variety である。

**Example 5** Segre embedding  $f: \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{P}_K^3$  を考える。これはつまり

$$f((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1) \quad (25)$$

で定義される。このときの像  $(z_0, z_1, z_2, z_3)$  は

$$z_0z_3 = z_1z_2 \quad (26)$$

を満たす点の集合である。

**Theorem 2**  $|\psi\rangle \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2^N-1}$  が separable state であるための必要十分条件は  $|\psi\rangle$  が Segre embedding  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2^N-1}$  の像に含まれることである。

**Example 6** とくに  $N$  のとき、Segre embedding は

$$f((x_0, x_1), (y_0, y_1)) = (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1) \quad (27)$$

となる。一方で、 $|\psi\rangle = x_0|0\rangle + x_1|1\rangle$ ,  $|\phi\rangle = y_0|0\rangle + y_1|1\rangle$  のとき、

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = x_0y_0|00\rangle + x_0y_1|01\rangle + x_1y_0|10\rangle + x_1y_1|11\rangle \quad (28)$$

によって定義される。

### 2.3 量子検索

ここでは量子検索のアルゴリズム [2, 1] を紹介する。詳細は教科書 [9] を参照のこと。

まず量子検索とは次のような問題を解くためのアルゴリズムである。

**Problem 1**  $n$ -qubit 量子状態に対する関数  $f: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1} \rightarrow 0, 1$ ,  $N = 2^n$  が Oracle として与えられ、しかも  $f(|w\rangle) = 1$  となる  $|w\rangle$  は 1 つしかないものとする。そのときその  $|w\rangle$  を見つけよ。

これは古典的にはすべてをしらみつぶしにチェックするしかないので、計算量は  $O(N)$  となる。一方量子計算での計算量は  $O(\sqrt{N})$  となる。以下にそのアルゴリズムを説明する。

見つけようとしている状態を  $|w\rangle$  とし、 $|a\rangle := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle$  とする。つまり、 $|a\rangle$  は平均的な superposition である。このとき、

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{w \neq i} |i\rangle \quad (29)$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (30)$$

とすると

$$|a\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |r\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |w\rangle \quad (31)$$

となる。以下、 $|a\rangle$  は  $|r\rangle, |w\rangle$  を基底とするベクトル空間で表現されると考えて、

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (32)$$

と書くことにする。ちなみにこのベクトルは元の基底で書くと

$$\left( \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{N-1}}, \dots, \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{N-1}}, \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{N-1}}, \dots, \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{N-1}} \right)^T \quad (33)$$

$$i \text{ 番目} \quad (34)$$

となる。このとき、

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (35)$$

とすると、これは(元の基底でも)ユニタリ行列であり、

$$U(\theta)^k \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k + \frac{1}{2})\theta \\ \sin(k + \frac{1}{2})\theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

ここで、 $(k + \frac{1}{2})\theta \approx \frac{\pi}{2}$  とすれば、 $|w\rangle$  が測定される確率が十分高くなる。 $\theta = O(1/\sqrt{N})$  なので、

$$k = O(\sqrt{N}) \quad (37)$$

となる。

### 3 量子検索と測地線

曲線  $C : |\psi(s)\rangle \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) を考える。ただし、 $\langle \psi(s) | \psi(s) \rangle = 1$  を満たすものとする。 $|d\psi(s)\rangle$  をその接ベクトルとし、 $|d\psi(s)_\perp\rangle$  を次のように定義する。

$$|d\psi(s)_\perp\rangle := |d\psi(s)\rangle - \langle \psi(s) | d\psi(s) \rangle |\psi(s)\rangle \quad (38)$$

このとき  $ds$  を

$$\frac{1}{4} ds^2 := \langle d\psi(s)_\perp | d\psi(s)_\perp \rangle \quad (39)$$

$$= \langle d\psi(s) | d\psi(s) \rangle - [\text{Im} \langle \psi(s) | d\psi(s) \rangle]^2 \quad (40)$$

と定義する。これはゲージ理論により、well-definedness が保証されている。

**Definition 5** この  $ds$  によって定義される *metric* を **Fubini-Study metric** と呼ぶ。これは、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$  内で *well-defined* である。以下、 $|\psi\rangle$  と  $|\phi\rangle$  の間の *Fubini-Study 距離* を  $d_{\text{FS}}(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$  と書くこととする。

**Theorem 3** *Fubini-Study metric* による測地線を  $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$  にリフトしたものの一つは、直交基底  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  に対して、次のような形になる。

$$|\psi(s)\rangle = \cos \frac{s}{2} |\psi_1\rangle + \sin \frac{s}{2} |\psi_2\rangle \quad (41)$$

**Example 7** 斉次座標で表して、 $|\psi_1\rangle = (1, 1, 0, 0)$ ,  $|\psi_2\rangle = (0, 0, 1, 1)$  とする。このとき

$$|\psi(s)\rangle = \cos \frac{s}{2} |\psi_1\rangle + \sin \frac{s}{2} |\psi_2\rangle \quad (42)$$

$$= (\cos \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2}) \quad (43)$$

を考える。 $z_0 \neq 0, z_2 \neq 0$  というアフィン空間で見ると、それぞれ、

$$(1, \tan \frac{s}{2}, \tan \frac{s}{2}), \quad (44)$$

$$(\cot \frac{s}{2}, \cot \frac{s}{2}, 1) \quad (45)$$

となる。

以上のことから、量子検索の途中の状態は、開始点から終了点を結ぶ Fubini-Study についての測地線の上にあることになる。

量子検索の高速化の可能性について考えると、検索の過程が測地線であることは重要な意味を持っている。つまり、求めたい点 (検索結果  $|w\rangle$ ) までは最短距離を動いていることを意味する。また、 $|w\rangle$  についての情報が何もない初期状態は  $|a\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} |i\rangle$  という平均状態にせざるを得ない。また、移動距離  $\theta$  を途中で加速することも不可能であることが示されている [8]。

以上のことから、Fubini-Study 距離が自然な距離だと思えば、Grover の量子検索アルゴリズムは最短最速の経路をたどっていることになる。このことから、更なる高速化は難しいと思われる。

### 4 量子検索と entanglement

量子検索において、始点  $|a\rangle$  と目的点  $|w\rangle$  はともに separable state である。一方、検索の途中で通過する点は entangled state である。特に  $|\psi\rangle$  の entanglement の度合い  $E(|\psi\rangle)$  を

$$E(|\psi\rangle) = \min_{|\phi\rangle \in (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^n} d_{\text{FS}}(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \quad (46)$$

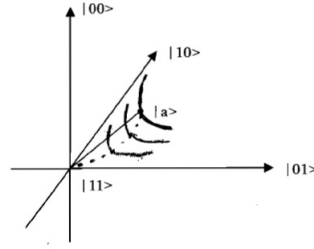


図 5: 2-qubit の場合の量子検索

で表現する。  $n \geq 7$  ならば、この  $E(|\psi\rangle)$  は最大値にまで達することが知られている [8]。

そこで、量子検索は実際に entanglement を最大限に利用しているのかというのが問題になる。しかし、entanglement は本質的ではないことがわかる。実際、[6, 7] によると、entangle 状態を経ない量子検索も可能である。

**Example 8** 2-qubit の場合を考え、  $|w\rangle = |11\rangle$  とする。このときの Segre embedding の像は

$$z_0 z_3 = z_1 z_2 \quad (47)$$

となる。これは、  $z_3 \neq 0$  によるアフィン空間では、

$$\zeta_0 = \zeta_1 \zeta_2 \quad (48)$$

となる。このアフィン空間で見ると、量子検索の経路は直線となり、始点  $|a\rangle$  と終点  $|w\rangle$  のみが separable になる (図 5)。

## 5 考察

2 準位系で、密度行列による pure state の表現：

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (49)$$

を考える。つまり、pure state の集合は  $xyz$  空間上では単位球面になる。このとき、球面上の測地線距離と Fubini-Study 距離は一致することがわかっている [5]。これを高準位系で一般化すると、密度行列は

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1 + 1}{d} & \frac{\eta_d - i\eta_{d+1}}{2} & \dots & \frac{\eta_{3d-4} - i\eta_{3d-3}}{2} \\ \frac{\eta_d + i\eta_{d+1}}{2} & \frac{\eta_2 + 1}{d} & \dots & \frac{\eta_{5d-8} - i\eta_{5d-7}}{2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\eta_{3d-6} + i\eta_{3d-5}}{2} & & & \frac{\eta_{d-1} + 1}{d} & \frac{\eta_{d^2-2} - i\eta_{d^2-1}}{2} \\ \frac{\eta_{3d-4} + i\eta_{3d-3}}{2} & & & \frac{\eta_{d^2-2} + i\eta_{d^2-1}}{2} & \frac{-\sum_{i=1}^{d-1} \eta_i + 1}{d} \end{pmatrix} \quad (50)$$

のようにパラメタライズされるが、  $d \geq 3$  のときはこのパラメータ空間 ( $d^2 - 1$  次元) 上の距離と Fubini-Study 距離は一致しないことがわかっている [4]。



これはつまり、pure state の  $\mathbb{P}_c^p$  上の座標による表現と、式 50 によるパラメタライズが一致していないことを意味している。つまり射影表現の観点からだ、式 50 は「不自然な」パラメタライズだということができる。2 準位系では、強い対象性によりたまたまそれらが一致したにすぎない。

## 6 今後の課題

量子検索については、幾何的な意味をある程度理解できたので、初期値がずれたときや途中でノイズが入る場合の検討をしたい。(既存研究がたくさんありそうだが未調査)

それと平行に、以前からの研究の続きとして高準位系の mixed state を含めた各種距離空間の関係も調査したい。

## 参考文献

- [1] E. Biham, O. Biham, D. Biron, M. Grassl, and D. A. Lidar. Grover's quantum search algorithm for an arbitrary initial amplitude distribution. *Phys. Rev. A*, Vol. 60, No. 4, pp. 2742–2745, 1999.
- [2] L.K. Grover. Quantum computers can search rapidly by using almost any transformation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, No. 19, pp. 4329–4332, 1998.
- [3] R. Hartshorn. *Algebraic Geometry*. Springer–Verlag, 1977.
- [4] K. Kato. 3 準位以上で Fubini-Study 距離と測地線距離による Voronoi 図が一致しないことの証明. 今井研セミナーでの口頭発表, Oct. 2005.
- [5] K. Kato, M. Oto, H. Imai, and K. Imai. Voronoi diagrams for pure 1-qubit quantum states. In *VD2005: Proceedings of Voronoi Diagram 2005*, Seoul, Korea, 2005.
- [6] S. Lloyd. Quantum search without entanglement. *Phys. Rev. A*, Vol. 61, No. 010301, 1999.
- [7] D.A. Meyer. Sophisticated quantum search without entanglement. *Phys. Rev. Letters*, Vol. 85, No. 9, pp. 2014–2017, 2000.
- [8] A. Miyake and M. Wadati. Geometric strategy for the optimal quantum search. *Phys. Rev. A*, Vol. 64, No. 042717, 2001.
- [9] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Univ. Press, 2000.